کوییز درس پردازش سیگنال	زمان:15 دقیقه
نام و نام خانوادگی	شماره دانشجویی

تابع ویژه سیستم : اگر خروجی یک سیستم به یک ورودی برابر حاصلضرب همان ورودی در یک عدد ثابت مختلط باشد، آن تابع ورودی، تابع ویژه سیستم نامیده می شود.

سوال 1– الف:نشان دهید تابع $x(n) = z^n$ که z یک عدد ثابت مختلط است یک تابع ویژه سیستم برای هر سیستم زمان گسسته خطی تغییر ناپذیر با زمان LSI است. ($x(n) = e^{jw_0 n}$ نیز این خصوصیت را دارد)

راهنمایی: از تعریف$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$ استفاده کنید.

ب: با مثال نقض نشان دهید $x(n) = z^n u(n)$ یک تابع ویژه برای هر سیستم LSI نیست.

الف:

$$x(n) = z^n \rightarrow \ y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} = x(n)A$$

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} = H(z)$$

ب: برای سیستمی با پاسخ ضربه $h(n) = \delta(n-1)$

$$x(n) = z^n u(n) \rightarrow \quad y(n) = z^{n-1}u(n-1)$$

که خروجی این سیستم برابر ضرب یک عدد مختلط در $x(n) = z^n u(n)$ نیست.

این سوال منبع باز و زمان باز است.

تخمین حداقل میانگین مربعات خطا MMSE و فیلتر منطبق

$$MSE = \sum_n |x_n - \hat{x}_n|^2 = \sum_n (x_n - \hat{x}_n)^*(x_n - \hat{x}_n)$$

با مشتق گرفتن از خطا نسبت به پارامتر های مطلوب رابطه تخمین به دست می آید. در آنالیز متغیرهای مختلط از تعریف "شجاعانه" زیر استفاده کنید: $\frac{\partial a}{\partial a} = 1\,, \quad \frac{\partial a^*}{\partial a} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a\text{: complex variable}$

سوال 2– تعداد N نمونه اول از سیگنال $x(n) = ae^{jw_0 n} + v(n)$ به صورت $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ داده شده است. که $v(n)$ یک نویز سفید جمع شونده با میانگین صفر است. بهترین تخمین a را با معیار MMSE به دست بیاورید. (a اعداد مختلط ثابت هستند) (راهنمایی: مقدار مطلوب را به صورت $n = 0,1, \dots, N-1$;$\hat{a}e^{jw_0 n}$ در نظر بگیرید)

(در مسایل عملی نمونه های یک سیگنال را داریم و پارامترهای آن به عنوان مثال مولفه های فرکانسی آن را میخواهیم به دست بیاوریم)

$$MSE=\sum_{n=0}^{N-1}\left|x_n-\hat{a}e^{jw_0n}\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left(x_n-\hat{a}e^{jw_0n}\right)^*\left(x_n-\hat{a}e^{jw_0n}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(x_n^*-\hat{a}^*e^{-jw_0n}\right)\left(x_n-\hat{a}e^{jw_0n}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x_n^*x_n-x_n^*\hat{a}e^{jw_0n}-\hat{a}^*x_ne^{-jw_0n}+\hat{a}^*\hat{a}$$

$$\frac{\partial a}{\partial a}=1\,,\quad \frac{\partial a^*}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial a^*a}{\partial a}=\frac{\partial a^*}{\partial a}a+\frac{\partial a}{\partial a}a^*=a^*$$

$$\frac{\partial MSE}{\partial a}=\sum_{n=0}^{N-1}-x_n^*e^{jw_0n}+\hat{a}^*=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}-x_n^*e^{jw_0n}+\sum_{n=0}^{N-1}\hat{a}^*=0$$

$$-\sum_{n=0}^{N-1}x_n^*e^{jw_0n}+N\hat{a}^*=0$$

$$N\hat{a}^*=\sum_{n=0}^{N-1}x_n^*e^{jw_0n}$$

$$\hat{a}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_ne^{-jw_0n}$$

اگر بردار $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})^T$ و $\mathbf{w}=\frac{1}{N}\left(e^{jw_0},e^{j2w_0},\dots,e^{j(N-1)w_0}\right)^T$ باشند تصویر بردار ورودی $\mathbf{x}$ بر روی بردار $\mathbf{w}$ برابر با ضرب داخلی دو بردار است و تخمین $\hat{a}$ را به دست می دهد. به بیان دیگر $\hat{a}$ میزان انرژی سیگنال ورودی در زیرفضای $\mathbf{w}$ است.